LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 23 / Janeiro / 2019 Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

1. Considere $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ -\alpha & -3 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$.

(20) **(a)** Mostre que r (A_α) = 3, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

(25) **(b)** Defina espaço linha de uma matriz de dimensão $m \times n$ e apresente uma base para o espaço linha de A_α com $\alpha = 0$. Justifique a sua opção.

(c) Considere a matriz B constituída pelas três últimas colunas de A_α com $\alpha = 4$.

(30) **(c1)** Calcule os valores próprios de B e as suas multiplicidades.

(25) **(c2)** Apresente a expressão da forma quadrática $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\, \mathbf{x}$ e classifique a forma.

2. Considere as seguintes afirmações:

(20) **(a)** Se V é um espaço vectorial, $f : V \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow V$ são aplicações lineares e f é injectiva, então ($f \circ g$) é também injectiva.

(20) **(b)** Se P e Q são matrizes quadradas de ordem n e $P = \beta\, I_n$ (com $\beta \in \mathbb{R}$), então

$$det\,(P\,Q) = \beta^n\, det\,(Q).$$

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contra-exemplo para justificar cada resposta.

(30) **3.** Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{\, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \quad c = a + b, \quad d = a - b \}$$

Defina dimensão de um subespaço vectorial e mostre que *dim* (F) = 2. Apresente um subespaço de $\mathbb{R}^4$, contido em F, com dimensão 1. Justifique a sua escolha.

(30) **4.** Admita que E é um espaço vectorial de dimensão n ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$), $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ é uma base de E e $\varphi: E \longrightarrow E$ é a aplicação linear definida por $\varphi\,(\mathbf{b}_i) = \mathbf{b}_{k+i}$, se $1 \leq i \leq k$ e $\varphi\,(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$, se $k+1 \leq i \leq n$. Prove que $Im\,(\varphi) = ker\,(\varphi)$.